

**1<sup>ο</sup> ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ:  
ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**  
Αντικείμενο εξέτασης: Όλη η διδακτέα ύλη  
Χρόνος εξέτασης: Απεριόριστος λόγω βαθμού δυσκολίας

**ΘΕΜΑ 1ο**

Στις ερωτήσεις 1-4 να γράψετε στο φύλλο απαντήσεών σας τον αριθμό της ερώτησης και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

1. Κύκλωμα R-L-C σειράς εκτελεί εξαναγκασμένες ταλαντώσεις υπό την επίδραση εναλλασσόμενης Η.Ε.Δ. της μορφής  $E = E_0 \eta \omega t$ , όπου η συχνότητα  $\omega$  μεταβάλλεται στο διάστημα  $0 \leq \omega < +\infty$ . Η ωμική αντίσταση R του κυκλώματος είναι μη αμελητέα, και η συχνότητα συντονισμού είναι  $\omega_0$ . Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι λανθασμένη;
- α. Για  $\omega \ll \omega_0$  οι απώλειες ενέργειας λόγω φαινομένου Joule στην ωμική αντίσταση του κυκλώματος είναι μικρότερες από ότι κατά τον συντονισμό.
- β. Για  $\omega \gg \omega_0$  το πλάτος της έντασης του ρεύματος τείνει ασυμπτωτικά στην τιμή μηδέν.
- γ. Για  $\omega = \omega_0$  το πλάτος της έντασης του ρεύματος μεγιστοποιείται λαμβάνοντας κάποια πεπερασμένη τιμή λόγω του γεγονότος ότι έχουμε μη αμελητέα ωμική αντίσταση.
- δ. Η μέγιστη δυνατή τιμή του πλάτους της έντασης του ρεύματος εξαρτάται από το πλάτος της εναλλασσόμενης Η.Ε.Δ. και από την τιμή της ωμικής αντίστασης του κυκλώματος.

**Μονάδες 5**

2. Ο στιγμιαίος ρυθμός απώλειας ενέργειας σε μία φθίνουσα μηχανική ταλάντωση όπου η δύναμη που αντιστέκεται στην κίνηση είναι της μορφής  $f = -bv$
- α. είναι ανάλογος της στιγμιαίας ταχύτητας  $v$  του ταλαντωτή.
- β. είναι αντιστρόφως ανάλογος της σταθεράς απόσβεσης  $b$ .
- γ. είναι ανάλογος του τετραγώνου της στιγμιαίας ταχύτητας  $v$  του ταλαντωτή.
- δ. είναι ανεξάρτητος της σταθεράς απόσβεσης  $b$ .

**Μονάδες 5**

3. Το οπτικό επίπεδο πρόσπτωσης
- α. είναι το επίπεδο που ορίζεται από τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος και το διάνυσμα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου.
- β. είναι το επίπεδο που ορίζεται από την προσπίπτουσα ακτίνα και την κάθετο στη διαχωριστική επιφάνεια δύο οπτικών μέσων.
- γ. είναι το επίπεδο που διαχωρίζει δύο διαφορετικά οπτικά μέσα.

δ. είναι ένα οποιοδήποτε επίπεδο κάθετο στη διαχωριστική επιφάνεια δύο οπτικών μέσων.

### Μονάδες 5

4. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις που αναφέρεται στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα είναι λανθασμένη;

α. Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα που διαδίδονται στον κενό χώρο είναι εγκάρσια κύματα.

β. Δεν είναι δυνατόν να υπάρξουν στάσιμα ηλεκτρομαγνητικά κύματα στον κενό χώρο.

γ. Κατά την ανάκλαση ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος στην επιφάνεια ενός γυάλινου πλακιδίου, η ηλεκτρική συνιστώσα του κύματος είναι κάθετη στην πορεία της ανακλώμενης δέσμης.

δ. Η ηλεκτρική και η μαγνητική συνιστώσα ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος που διαδίδεται στο κενό είναι πάντοτε συμφασικές σε πολύ μεγάλη απόσταση από την πηγή παραγωγής των κυμάτων.

### Μονάδες 5

5. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα καθεμιάς από τις προτάσεις που ακολουθούν και ακριβώς δίπλα την ένδειξη  $\Sigma$  αν η πρόταση που παρατίθεται είναι σωστή ή  $\Lambda$  αν είναι λανθασμένη.

A. Ένα μεγάλο δοχείο γεμάτο με νερό ηρεμεί στην επιφάνεια ενός τραπεζιού. Κάποια στιγμή εκτοξεύεται οριζόντια ένα βλήμα, το οποίο διαπερνά το δοχείο διανοίγοντας πολύ μικρές οπές στα πλευρικά του τοιχώματα, με αποτέλεσμα να αρχίσει να εκρέει νερό. Η ταχύτητα εκροής του νερού αμέσως μετά τη διέλευση της σφαίρας μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Toricelli.

B. Η εξίσωση του Bernoulli είναι απόρροια της αρχής διατήρησης της μάζας του ρευστού.

Γ. Κατά την «ασυμπιεστη» ροή ενός ρευστού η πίεση έχει την ίδια τιμή και δεν μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου σε οποιοδήποτε σημείο του ρευστού.

Δ. Κατά την εξαγωγή της εξίσωσης του Bernoulli η επίδραση της βαρύτητας στο ρευστό δεν λαμβάνεται υπόψη.

E. Ένας δοκιμαστικός σωλήνας σχήματος U είναι μερικώς γεμάτος με νερό. Αν φυσήξουμε στο ένα άκρο του σωλήνα τότε η στάθμη του νερού σε εκείνη τη μεριά κατέρχεται ελαφρώς.

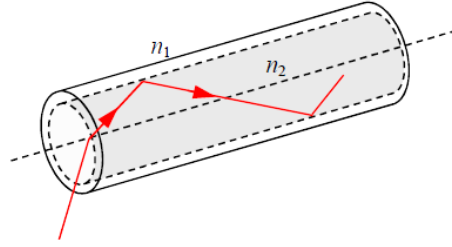
### Μονάδες 5

## ΘΕΜΑ 2ο

1.A Σε ποιο οπτικό φαινόμενο στηρίζεται η λειτουργία των οπτικών ινών;

Μονάδες 2

1.B Η οπτική ίνα του διπλανού σχήματος αποτελείται από μη διαβαθμισμένο γυάλινο κορμό με δείκτη διάθλασης  $n_2$  και περιβάλλεται από περίβλημα με δείκτη διάθλασης  $n_1$ , όπου  $n_1 < n_2$ . Έστω μια δέσμη φωτός η οποία εισέρχεται στον γυάλινο κορμό προερχόμενη από τον αέρα υπό γωνία  $\theta$  ως προς τον άξονα συμμετρίας της οπτικής ίνας (η διακεκομμένη ευθεία του σχήματος). Να αποδείξετε ότι η μέγιστη δυνατή τιμή της γωνίας  $\theta$  για την οποία μια δέσμη μπορεί να διαδοθεί εντός της οπτικής ίνας, δίνεται από τη σχέση



$$\theta = \eta\mu^{-1}\left(\sqrt{n_2^2 - n_1^2}\right)$$

Μονάδες 6

2. Στην ερώτηση που ακολουθεί, να γράψετε στο φύλλο απαντήσεών σας τον αριθμό της ερώτησης και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Ένα διαπασών που εκπέμπει ήχο μέτριας συχνότητας κινείται κάθετα προς επίπεδο κατακόρυφο ακίνητο τοίχο μεγάλων διαστάσεων ο οποίος λειτουργεί ως επίπεδη ανακλαστική επιφάνεια ηχητικών κυμάτων. Το διαπασών προσεγγίζει τον τοίχο με ταχύτητα  $v \ll v_{\eta}$ , όπου  $v_{\eta}$  είναι η ταχύτητα του ήχου στον αέρα. Σε ποια από τις παρακάτω περιπτώσεις ένας παρατηρητής δεν μπορεί να ακούσει διακροτήματα;

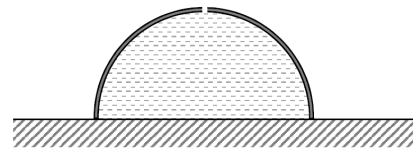
- α. Όταν είναι ακίνητος μεταξύ του διαπασών και του τοίχου (στην ίδια ευθεία με το διαπασών).
- β. Όταν είναι ακίνητος πίσω από το διαπασών (στην ίδια ευθεία με το διαπασών).
- γ. Όταν κινείται μαζί με το διαπασών (προσεγγίζοντας μαζί τον τοίχο).

Μονάδες 2

Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

Μονάδες 4

3. Το δοχείο με σχήμα ημισφαιρικού κελύφους πολύ μικρού πάχους του διπλανού σχήματος φέρει μία απειροστά μικρή οπή στο ανώτερο σημείο του και είναι τοποθετημένο πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια. Από την μικρή οπή στο πάνω μέρος χύνεται νερό το οποίο καταλαμβάνει τον κλειστό όγκο που περικλείεται από το δοχείο και την οριζόντια επιφάνεια. Διαπιστώνεται ότι όταν το δοχείο γεμίζει πλήρως, νερό αρχίζει να διαρρέει από το κάτω χείλος του που είναι σε επαφή με την οριζόντια επιφάνεια. Η ακτίνα του δοχείου είναι  $R$  και η πυκνότητα του νερού  $\rho$ .



Στην ερώτηση που ακολουθεί, να γράψετε στο φύλλο απαντήσεών σας τον αριθμό της ερώτησης και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Πόση είναι η μάζα του ημισφαιρικού δοχείου;

α.  $4\pi R^3/3$

β.  $2\pi R^3/3$

γ.  $\pi R^3/3$

**Μονάδες 2**

Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

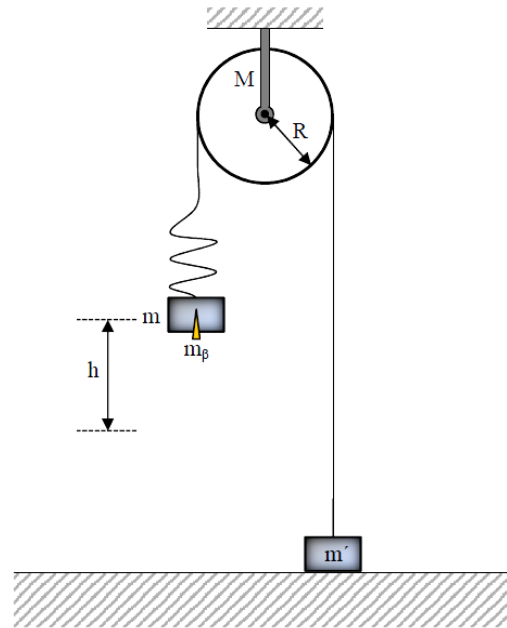
**Μονάδες 4**

4. Μια λεπτή εύκαμπτη ομογενής και ισοπαχής ράβδος κάμπτεται έτσι ώστε όταν τα δύο άκρα της συμπέσουν να σχηματιστεί ισόπλευρο τρίγωνο. Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας της ανωτέρω ράβδου ως προς άξονα περιστροφής διερχόμενο από το κέντρο μάζας της, κάθετο στη ράβδο, είναι ίση προς  $I$ . Ποια είναι η ροπή αδράνειας της κεκαμμένης ράβδου ως προς άξονα περιστροφής κάθετο στο επίπεδο του σχηματιζόμενου τριγώνου, διερχόμενου από το βαρύκεντρό του; Να εκφράσετε την απάντησή σας συναρτήσει των δεδομένων μεγεθών της άσκησης και μόνον.

**Μονάδες 5**

### ΘΕΜΑ 3ο

Γύρω από τον κύλινδρο μάζας  $M$  και ακτίνας  $R$  του διπλανού σχήματος είναι τυλιγμένο αβαρές και μη εκτατό νήμα. Στο αριστερό άκρο του νήματος είναι δεμένο σώμα μάζας  $m$ , ενώ στο δεξί άκρο του είναι δεμένο σώμα άγνωστης μάζας  $m'$ . Ο άξονας περιστροφής του κυλίνδρου είναι ακλόνητα στερεωμένος σε οροφή όπως δείχνεται στο σχήμα. Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του  $I_{CM} = \frac{1}{2} MR^2$ , και η επιτάχυνση της βαρύτητας  $g$ . Αρχικά το όλο σύστημα ισορροπεί, με το νήμα να είναι τεντωμένο σε όλο το μήκος του, το σώμα μάζας  $m'$  εφάπτεται οριακά στο οριζόντιο δάπεδο, και το σώμα μάζας  $m$  αιωρείται. Να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα συναρτήσει των δεδομένων μεγεθών της άσκησης και μόνον.



**A.** Να υπολογίσετε τη δύναμη αντίδρασης που δέχεται ο άξονας του κυλίνδρου.

**Μονάδες 4**

**B.** Τη χρονική στιγμή  $t = 0$  σημειακό βλήμα μάζας  $m_\beta \ll m$ , κινούμενο κατακόρυφα προς τα πάνω σφηνώνεται ακαριαία στο σώμα μάζας  $m$ , και αμέσως μετά το συσσωμάτωμα ανέρχεται κατακόρυφα κατά μία απόσταση ίση προς  $h$  (όπως δείχνεται στην εικόνα).

**B.1** Να υπολογιστεί η γωνιακή ταχύτητα με την οποία ξεκινά να περιστρέφεται ο κύλινδρος. Δίνεται επιπλέον ότι δεν λαμβάνει χώρα καμία αναπήδηση.

**Μονάδες 9**

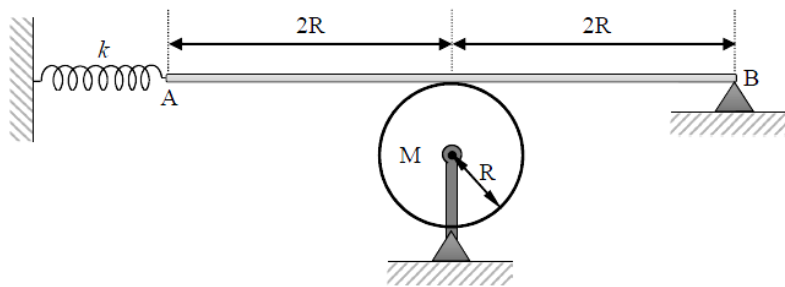
**B.2** Το συσσωμάτωμα στην αριστερή μεριά κατερχόμενο, κάποια στιγμή συγκρούεται τελείως ανελαστικά με το οριζόντιο δάπεδο, διανύοντας μια κατακόρυφη απόσταση ίση προς  $5h/2$ , μετρούμενη από τη θέση στην οποία ακινητοποιήθηκε στιγμιαία μετά τη δημιουργία του. Σε πόσο χρόνο από τη στιγμή της προαναφερθείσας σύγκρουσης θα ξεκινήσει να ανασηκωθεί (χωρίς αναπήδηση) το συσσωμάτωμα; Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

**Μονάδες 12**

Να θεωρηθεί ως δεδομένο για όλη την άσκηση ότι δεν λαμβάνει χώρα ποτέ ολίσθηση του νήματος πάνω στην επιφάνεια του κυλίνδρου (η οποία θεωρείται αρκούτσως τραχιά), και επίσης ότι το νήμα είναι πολλές φορές τυλιγμένο γύρω από τον κύλινδρο. Η ορθή αντιμετώπιση της άσκησης στηρίζεται στη χρησιμοποίηση των δοθέντων παραδοχών.

#### ΘΕΜΑ 4ο

Στη διάταξη του παρακάτω σχήματος, ομογενής και ισοπαχής δοκός AB μάζας  $M$  και μήκους  $4R$  βρίσκεται σε επαφή με το ανώτερο σημείο ομογενούς δίσκου μάζας  $M$  και ακτίνας  $R$  ο οποίος μπορεί να περιστρέφεται γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα κάθετο στο επίπεδο της σελίδας. Προκειμένου η κίνηση της δοκού να περιοριστεί μόνο κατά την οριζόντια διεύθυνση (δηλ. κατά τη διεύθυνση του μήκους AB ως φαίνεται παρακάτω) το δεξιό τμήμα της δοκού βρίσκεται σε επαφή με κατάλληλα τοποθετημένο ακλόνητο υποστήριγμα. Το αριστερό άκρο A της δοκού βρίσκεται σε επαφή (άλλα όχι δεμένο) με το ελεύθερο άκρο οριζώντιου ιδανικού ελατηρίου σταθερής επαναφοράς  $k = Mg/2R$ , το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο. Ο συντελεστής τριβής (στατικής ή ολίσθησης) μεταξύ δοκού-δίσκου και δοκού-υποστηρίγματος είναι  $\mu$ , ενώ η τριβή μεταξύ του δίσκου και του άξονα περιστροφής του είναι αμελητέα. Αρχικώς το σύστημα κρατείται ακινητοποιημένο έτσι ώστε το κέντρο της δοκού να βρίσκεται σε επαφή με το ανώτερο σημείο του δίσκου, ενώ το άκρο B αυτής μόλις που αγγίζει το ακλόνητο υποστήριγμα. Επιπλέον, το ελατήριο είναι συμπιεσμένο κατά μια απόσταση  $s$  ως προς το φυσικό του μήκος. Δίνονται: Η ροπή αδράνειας ομογενούς δίσκου μάζας  $M$  και ακτίνας  $R$  ως προς οριζόντιο άξονα διερχόμενο εκ του κέντρου μάζας του  $I_{CM} = \frac{1}{2} MR^2$ , και η επιτάχυνση της βαρύτητας  $g$ .



Τη χρονική στιγμή  $t = 0$  η δοκός αφήνεται ελεύθερη, οπότε κινείται κατά το μήκος της προς τα δεξιά. Υπό την προϋπόθεση ότι δεν λαμβάνει χώρα σχετική ολίσθηση μεταξύ δοκού και δίσκου, και ότι το σύστημα δοκού-δίσκου τελικώς ακινητοποιείται χωρίς να χαθεί η επαφή μεταξύ τους, να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα συναρτήσει των δεδομένων μεγεθών της άσκησης και μόνον.

- A.** Να εκφράσετε τη δύναμη επαφής μεταξύ δοκού-δίσκου και δοκού-υποστηρίγματος συναρτήσει της μετατόπισης της δοκού από την αρχική της θέση (έστω  $x$ ), και να βρείτε το μέτρο των δυνάμεων επαφής ακριβώς τη στιγμή που το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος.

**Μονάδες 5**

- B.** Να βρείτε την ταχύτητα του κέντρου μάζας της δοκού καθώς και την γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του δίσκου ακριβώς τη στιγμή που χάνεται η επαφή μεταξύ του ελατηρίου και της δοκού.

**Μονάδες 10**

Γ. Να υπολογίσετε πόσες περιστροφές έχει εκτελέσει ο δίσκος από τη χρονική στιγμή  $t = 0$  ως τη στιγμή που το σύστημα δοκού-δίσκου τελικώς ακινητοποιείται.

**Μονάδες 10**

**ΤΕΛΟΣ ΚΡΙΤΗΡΙΟΥ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ**

**1<sup>ο</sup> ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ:**  
**ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**  
 Αντικείμενο εξέτασης: Όλη η διδακτέα ύλη  
**Απαντήσεις των ασκήσεων**

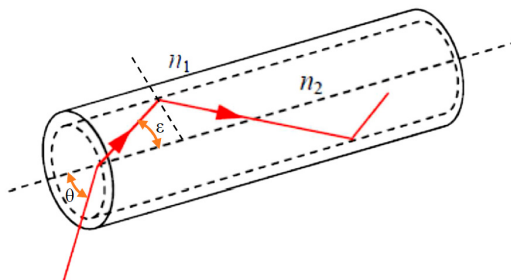
**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

1. (β), 2. (γ), 3. (β), 4. (β), 5.A (Λ), 5.B (Λ), 5.Γ (Λ), 5.Δ (Λ), 5.E (Λ)

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

**1.A** Η λειτουργία των οπτικών ινών στηρίζεται στο φαινόμενο της ολικής εσωτερικής ανάκλασης.

**1.B** Σύμφωνα με την εκφώνηση η δέσμη πέφτει υπό γωνία  $\theta$  ως προς τον άξονα συμμετρίας της οπτικής ίνας, προερχόμενη από τον αέρα. Όταν συναντά την κυκλική διατομή του γυάλινου κορμού διαθλάται, και για να διαδοθεί περαιτέρω στο εσωτερικό της ίνας πρέπει να πάθει ολική εσωτερική ανάκλαση στην παράπλευρη κυλινδρική διαχωριστική επιφάνεια κορμού-περιβλήματος. Για την αρχική διάθλαση εφαρμόζουμε τον νόμο του Snell και λαμβάνουμε



$$\sin \theta = n_2 \sin \epsilon$$

Για να έχουμε ολική εσωτερική ανάκλαση στη διαχωριστική επιφάνεια κορμού-περιβλήματος θα πρέπει η πρόπτωση να γίνει υπό γωνία μεγαλύτερη ή ίση με την κρίσιμη γωνία ολικής ανάκλασης, δηλαδή πρέπει

$$\frac{\pi}{2} - \epsilon \geq \theta_{crit} \Rightarrow \sin \left( \frac{\pi}{2} - \epsilon \right) \geq \sin \theta_{crit} \Rightarrow \cos \epsilon \geq \sin \theta_{crit} \Rightarrow \sqrt{1 - \sin^2 \epsilon} \geq \sin \theta_{crit}$$

όπου η ζητούμενη κρίσιμη γωνία βρίσκεται από την συνθήκη

$$n_2 \sin \theta_{crit} = n_1 \Rightarrow \sin \theta_{crit} = \frac{n_1}{n_2} .$$

Αντικαθιστώντας τις δύο ανωτέρω ισότητες στην ανισοτική συνθήκη λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \sin^2 \epsilon} \geq \sin \theta_{crit} &\Rightarrow \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta}{n_2^2}} \geq \frac{n_1}{n_2} \Rightarrow 1 - \frac{\sin^2 \theta}{n_2^2} \geq \frac{n_1^2}{n_2^2} \Rightarrow 1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \geq \frac{\sin^2 \theta}{n_2^2} \\ \Rightarrow \frac{n_2^2 - n_1^2}{n_2^2} &\geq \frac{\sin^2 \theta}{n_2^2} \Rightarrow n_2^2 - n_1^2 \geq \sin^2 \theta \end{aligned}$$

Περαιτέρω ισχύει ότι

$$0 \leq \sin^2 \theta \leq n_2^2 - n_1^2 \Rightarrow \sin \theta \leq \sqrt{n_2^2 - n_1^2} \Rightarrow \theta \leq \arcsin \left( \sqrt{n_2^2 - n_1^2} \right)$$



και συνεπώς  $\theta_{\max} = \arcsin\left(\sqrt{n_2^2 - n_1^2}\right)$  ό.έ.δ..

2. Το αυτί του παρατηρητή λαμβάνει ένα ηχητικό κύμα απευθείας από το διαπασών κι ένα ηχητικό κύμα (εξ' ανακλάσεως) από τον τοίχο, ο οποίος λειτουργεί ως δευτερογενής πηγή ηχητικών κυμάτων. Έστω  $f_s$  η συχνότητα δόνησης του διαπασών (μετρούμενη ως προς το σύστημα ηρεμίας του). Ο τοίχος αρχικώς λειτουργεί ως δέκτης ηχητικών κυμάτων τα ο-

ποία «αντιλαμβάνεται» με συχνότητα  $f_\tau = \frac{v_\eta}{v_\eta - v} f_s$  (το διαπασών πλησιάζει προς τον

τοίχο), όπου  $v$  η ταχύτητα κίνησης του διαπασών, και  $v_\eta$  η ταχύτητα του ήχου. Λειτουργώντας ως δευτερογενής πηγή ηχητικών κυμάτων ο τοίχος «εκπέμπει» ηχητικά κύματα

με συχνότητα  $f_\tau = \frac{v_\eta}{v_\eta - v} f_s$  ... συνεπώς ο παρατηρητής είναι δυνατόν να αντιληφθεί η-

χητικά κύματα με ελαφρώς διαφορετικές συχνότητες κι επομένως να ακούσει διακροτήματα! Ας ελέγξουμε μία προς μία τις περιπτώσεις που δίνονται.

- α. Όταν ο παρατηρητής είναι ακίνητος μεταξύ διαπασών και τοίχου, τότε το διαπασών τον

πλησιάζει οπότε ακούει απευθείας από το διαπασών ήχο συχνότητας  $f_1 = \frac{v_\eta}{v_\eta - v} f_s$ .

Συγχρόνως όμως ακούει και ήχο προερχόμενο από τον τοίχο με συχνότητα  $f_2 = f_\tau$ .

Καταφανώς είναι  $f_1 = f_2$  οπότε δεν δύναται να ακούει διακροτήματα. **Η σωστή απάντηση λοιπόν είναι αυτή!**

- β. Όταν ο παρατηρητής είναι ακίνητος πίσω από το διαπασών τότε δέχεται ένα ηχητικό

κύμα απευθείας από το διαπασών με συχνότητα  $f_1 = \frac{v_\eta}{v_\eta + v} f_s$  (γιατί το διαπασών απομακρύνεται από αυτόν κινούμενο προς τον τοίχο) και ένα ηχητικό κύμα εκ του τοί-

χου με συχνότητα  $f_2 = f_\tau = \frac{v_\eta}{v_\eta - v} f_s$ . Εφόσον  $f_1 \neq f_2 \approx f_s$  ο παρατηρητής μπορεί να

ακούσει διακροτήματα.

- γ. Όταν ο παρατηρητής κινείται μαζί με το διαπασών τότε το απευθείας ηχητικό κύμα που ακούει έχει συχνότητα  $f_1 = f_s$  ενώ το ηχητικό κύμα εκ του τοίχου το λαμβάνει με συχ-

νότητα  $f_2 = f_\tau = \frac{v_\eta}{v_\eta - v} f_s$ . Εφόσον  $f_1 \neq f_2 \approx f_s$  ο παρατηρητής μπορεί να ακούσει

διακροτήματα.

3. Ο πιο απλός τρόπος να λυθεί το πρόβλημα είναι να εστιάσουμε στην επίδραση του νερού επί της κλειστής επιφάνειας που το εμπεριέχει (η οποία αποτελείται από το ημισφαιρικό δοχείο και την οριζόντια επιφάνεια πάνω στην οποία ακουμπά το τελευταίο). Καθώς πληρούται το δοχείο με νερό, το νερό εξασκεί μια ανωστική δύναμη επί του ημισφαιρίου και μία δύναμη στον πάτο της κλειστής επιφάνειας που το εμπεριέχει. Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας του δοχείου, η συνισταμένη ανωστική δύναμη επί αυτού έχει φορά προς τα πάνω, ενώ η δύναμη που ασκείται στον πάτο της κλειστής επιφάνειας που εμπεριέχει το νερό έχει φορά προς τα κάτω. Αυτό που συμβαίνει όταν ξεχειλίζει η διάταξη είναι ότι τη στιγμή εκείνη η συνισταμένη ανωστική δύναμη επί του δοχείου αντισταθμίζει το βάρος του δοχείου, καθώς η δύναμη επαφής που ασκείται στο δοχείο εκ της οριζόντιας επιφάνειας μηδενίζεται. Η δύναμη που ασκείται στον πάτο της κλειστής επιφάνειας που εμπεριέχει το νερό είναι

$$F_{\pi\theta\mu} \approx p\pi R^2 = \rho g R \pi R^2 = \rho g \pi R^3$$

Μόλις αρχίζει η υπερχειλίση του συστήματος (σύμφωνα με τα όσα αναφέρθηκαν) η συνισταμένη ανωστική δύναμη που δέχεται το δοχείο είναι  $F_{\alpha\nu} = Mg$ . Οι δυνάμεις που δέχεται το ρευστό από την κλειστή επιφάνεια που το περιβάλλει μπορούν να βρεθούν με βάση τον 3<sup>ο</sup> νόμο του Νεύτωνα. Μόλις αρχίσει η υπερχειλίση του συστήματος, νερό εκρέει από το κάτω μέρος του ημισφαιρίου παράλληλα προς την επιφάνεια στήριξης, αλλά συγχρόνως το δοχείο πληρούται από το πάνω μέρος του μένοντας διαρκώς γεμάτο (αν σταματήσουμε να πληρούμε το δοχείο με νερό τότε μετά την αρχική εκροή το ημισφαιρικό δοχείο θα ξαναπατήσει στην επιφάνεια στήριξης και θα διακόψει την εκροή). Συνεπώς, για το τμήμα του νερού που εμπεριέχεται στο ημισφαιρικό δοχείο, κατά την κατακόρυφη διεύθυνση ισχύει ότι (χρησιμοποιώντας και τον 3<sup>ο</sup> νόμο του Νεύτωνα)

$$F_{\alpha\nu} + \rho g V - F_{\pi\theta\mu} = 0 \Rightarrow Mg = \rho g \pi R^3 - \rho g \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi R^3 \Rightarrow Mg = \frac{1}{3} \rho g \pi R^3 \Rightarrow M = \frac{1}{3} \rho \pi R^3$$

**Συνεπώς η σωστή απάντηση είναι η (γ).**

4. Έστω ότι η ράβδος έχει μήκος  $L$  και μάζα  $M$ . Η κεκαμμένη ράβδος μπορεί να αντικατασταθεί από τρεις μικρότερες ράβδους η καθεμία με μήκος  $L/3$  και μάζα  $M/3$ . Η ροπή αδράνειας που έχει κάθε μικρότερη ράβδος ως προς το κέντρο μάζας της είναι  $I' = \frac{1}{27}$ . Ένας άξονας περιστροφής κάθετος στο σχηματιζόμενο ισόπλευρο τρίγωνο, διερχόμενος από το βαρύκεντρό του, ισαπέχει από τα κέντρα μάζας των τριών μικρότερων ράβδων κατά μια απόσταση ίση προς  $\ell = L / 18\sqrt{3}$ . Συνεπώς, από το θεώρημα του Steiner η ροπή αδράνειας ως προς τον ανωτέρω άξονα περιστροφής για κάθε μικρότερη ράβδο είναι ίση προς  $\tilde{I} = I' + \frac{M}{3} \frac{L^2}{18^2 \cdot 3} = \frac{1}{27} I + \frac{12}{3^2 \cdot 18^2} I = \frac{1}{27} \frac{10}{9} I$ . Τέλος, η ροπή αδράνειας της κεκαμμένης ράβδου ως προς τον ανωτέρω άξονα περιστροφής είναι  $3\tilde{I} = \frac{10}{81} I$ , δηλαδή περίπου υποχαπλασιάστηκε.

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

**A.** Κατά την ισορροπία τα νήματα είναι κατακόρυφα. Οι δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε σώμα στα άκρα του νήματος είναι η τάση του νήματος και το βάρος του. Οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο είναι το βάρος του, η δύναμη στήριξης επί του άξονά του, και οι δυνάμεις που τείνεται το νήμα, οι οποίες δρουν στις θέσεις εκείνες όπου το νήμα εγκαταλείπει εφαιπτομενικά την περιφέρεια του κυλίνδρου. Επομένως ισχύουν οι κάτωθι εξισώσεις:

$$\begin{aligned} m : T_1 - mg &= 0 \\ m' : T_2 - m'g &\approx 0 \\ M : T_1 R - T_2 R &= 0 \quad \& \quad -T_1 - T_2 - Mg + A = 0 \end{aligned} \quad [1]$$

όπου στη 2<sup>η</sup> εξίσωση χρησιμοποιήθηκε το γεγονός ότι το σώμα μάζας  $m'$  εφάπτεται οριακά στο οριζόντιο δάπεδο, που σημαίνει η δύναμη επαφής από το δάπεδο είναι αμελητέα. Οι δύο πρώτες εξισώσεις οδηγούν στο συμπέρασμα ότι  $m' = m$ . Από την 3<sup>η</sup> εξίσωση περαιτέρω είναι

$$-T_1 - T_2 - Mg + A = 0 \Rightarrow A = Mg + 2mg = (M + 2m)g \quad [2]$$

Η συνισταμένη ροπή μηδενίστηκε ως προς τον άξονα περιστροφής του κυλίνδρου.

**B.1** Ο κύλινδρος θα ξεκινήσει να περιστρέφεται όταν το συσσωμάτωμα διέλθει από την κατακόρυφη θέση στην οποία δημιουργήθηκε, με ταυτόχρονο τέντωμα του νήματος. Από την Α.Δ.Ε. μεταξύ της θέσης δημιουργίας του συσσωματώματος και της ανώτερης θέσης όπου το συσσωμάτωμα σταματά στιγμιαία, λαμβάνουμε ότι

$$U_0 + \frac{1}{2}(m + m_\beta)V^2 = U_0 + (m + m_\beta)gh + 0 \Rightarrow V = \sqrt{2gh} \quad [3]$$

Η ταχύτητα που έχει το συσσωμάτωμα κατερχόμενο αμέσως πριν τεντωθεί ξανά το νήμα δίνεται και πάλι από την εξ. [3]. Περαιτέρω, λόγω αδράνειας, μόλις το νήμα τεντωθεί ο κύλινδρος αρχίζει να περιστρέφεται αντιωρολογιακά. Εδώ πέρα να σημειωθεί ότι, αφού αρχικά το νήμα ήταν τεντωμένο και με τη συσσωμάτωση χαλαρώνει ακαριαία από τα αριστερά, θα ακολουθήσει χαλάρωση σε όλο το μήκος του νήματος, με αποτέλεσμα το σώμα μάζας  $m'$  να πατήσει στο έδαφος (με το οποίο πριν ήταν οριακά σε επαφή). Για να υπολογίσουμε τη γωνιακή ταχύτητα με την οποία ξεκινά να περιστρέφεται ο κύλινδρος χρειάζεται να καταφύγουμε σε μια άλλη προσέγγιση. Θεωρώντας ακαριαίο το τέντωμα του νήματος πάνω σε όλο το μήκος του, θα επικαλεστούμε τη διατήρηση της στροφορμής του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής του κυλίνδρου. Ως εκ τούτου λοιπόν είναι

$$(m + m_\beta)\sqrt{2gh}R + 0 = (m + m_\beta + m')V'R + \frac{1}{2}MR^2\Omega \Rightarrow \quad [4]$$

$$m\sqrt{2gh}R + 0 = (m + m')V'R + \frac{1}{2}MR^2\Omega \Rightarrow 2m\sqrt{2gh}R = 4mV'R + MR^2\Omega$$

Εφόσον το νήμα είναι αβαρές και μη εκτατό και δεν ολισθαίνει επί της περιφέρειας του κυλίνδρου, σε κάθε σημείο της περιφέρειας του κυλίνδρου ισχύει ότι

$$V' = \Omega R \quad [5]$$

Από τις τελευταίες δύο εξισώσεις περαιτέρω είναι

$$2m\sqrt{2gh}R = 4mV'R + MR^2\Omega \Rightarrow 2m\sqrt{2gh}R = 4mV'R + MRV' \Rightarrow \quad [6]$$

$$V' = \frac{2m\sqrt{2gh}R}{4mR + MR} \Rightarrow V' = \frac{2m}{4m + M}\sqrt{2gh}$$

Εκ των εξ. [5] και [6] η γωνιακή ταχύτητα με την οποίαν ξεκινάει να περιστρέφεται ο κύλινδρος είναι

$$V' = \Omega R \Rightarrow \Omega = \frac{1}{R} \frac{2m}{4m + M} \sqrt{2gh} \quad [7]$$

**B.2** Επειδή το νήμα δεν ολισθαίνει στον κύλινδρο και η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα κατά την κίνηση των σωμάτων, η ολική ενέργεια του συστήματος των δύο μαζών στα άκρα του νήματος και του κυλίνδρου διατηρείται από τη στιγμή που το αριστερό νήμα τεντώνεται λόγω της καθόδου του συσσωματώματος μέχρι και αμέσως πριν το συσσωμάτωμα συγκρουστεί πλήρως ανελαστικά με το οριζόντιο δάπεδο. Από την Α.Δ.Ε. μεταξύ των προαναφερθέντων θέσεων λαμβάνουμε ότι (θεωρούμε ως επίπεδο αναφοράς για τη βαρυτική δυναμική ενέργεια το οριζόντιο δάπεδο)

$$\begin{aligned} (m + m_\beta)g \frac{\frac{3}{2}h}{\underbrace{\frac{3}{2}h}_{=\frac{5h}{2}}} + 0 + U_{\kappa\omega\lambda} + \frac{1}{2}(m + m_\beta + m')V'^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\Omega^2 = \\ 0 + m'g \frac{3}{2}h + U_{\kappa\omega\lambda} + \frac{1}{2}(m + m_\beta + m')\tilde{V}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\tilde{\Omega}^2 \Rightarrow \dots \Rightarrow mV'^2 + \frac{1}{4}MR^2\Omega^2 = m\tilde{V}^2 + \frac{1}{4}MR^2\tilde{\Omega}^2 \end{aligned} \quad [8]$$

Περαιτέρω είναι

$$mV'^2 + \frac{1}{4}MR^2\Omega^2 = m\tilde{V}^2 + \frac{1}{4}MR^2\tilde{\Omega}^2 \Rightarrow \left(\frac{4m + M}{4}\right)V'^2 = \left(\frac{4m + M}{4}\right)\tilde{V}^2 \Rightarrow \tilde{V} \approx V' \xleftarrow{[5]} \tilde{\Omega} = \Omega \quad [9]$$

Η τελευταία σχέση ουσιαστικά υπονοεί ότι όλα τα σώματα κινούνται πρακτικά με σταθερή ταχύτητα, κι αυτό προέκυψε σαν συνέπεια του γεγονότος ότι χρησιμοποιήσαμε την προσέγγιση ότι  $m_\beta \ll m = m'$  (η οποία είναι καθόλα αποδεκτή).

Κατά την ανελαστική κρούση του συσσωματώματος με το δάπεδο η ταχύτητά του μετά την κρούση μηδενίζεται. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της στροφορμής (ως προς τον άξονα του κυλίνδρου) ακριβώς πριν και ακριβώς μετά την ανελαστική κρούση που προαναφέρθηκε προκύπτει ότι

$$(m + m_\beta + m')\tilde{V}R + \frac{1}{2}MR^2\tilde{\Omega} = m'V''R + \frac{1}{2}MR^2\Omega' \Rightarrow 2mV' + \frac{1}{2}MR\Omega = mV'' + \frac{1}{2}MR\Omega' \quad [10]$$

Για να συνεχίσουμε παραπέρα πρέπει να γίνει κάποιου είδους διερεύνηση και ακριβώς στο σημείο αυτό της άσκησης απαιτείται αρκετή κριτική σκέψη! Το κύριο σημείο απ' εδώ και πέρα είναι το εξής: *Αν το νήμα στη δεξιά μεριά χαλαρώνει ή όχι αμέσως μετά την ανελαστική κρούση του συσσωματώματος με το δάπεδο.* Κατ' αρχήν, εφόσον έχουμε τελείως ανελαστική κρούση του συσσωματώματος με το δάπεδο, αυτό υπονοεί ότι αμέσως μετά την κρούση ο κύλινδρος δεν αντιστρέφει τη φορά κίνησής του, γιατί σε αυτή την περίπτωση θα τέντωνε αμέσως το αριστερό νήμα και εν συνεχεία το συσσωμάτωμα ουσιαστικά θα αναπηδούσε ανε-

λαστικά ... κάτι που δεν υποδεικνύεται από τα δεδομένα στις άσκησης. Μελετάμε λοιπόν τις ακόλουθες περιπτώσεις.

Περίπτωση 1<sup>η</sup>: Στιγμαίο σταμάτημα του κυλίνδρου με χαλάρωση του νήματος και στις δύο μεριές

Ένα ενδεχόμενο είναι ο κύλινδρος να σταματήσει στιγμιαία να περιστρέφεται αμέσως μετά την ανελαστική κρούση. Επομένως, αμέσως μετά την ανελαστική κρούση το νήμα στην αριστερή πλευρά χαλαρώνει, και την ίδια στιγμή, το σώμα στα δεξιά άκρο του νήματος λόγω αδράνειας θα συνεχίσει να κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω με ταυτόχρονη χαλάρωση του νήματος και στη δεξιά πλευρά. Περαιτέρω, δεν ασκείται καμία ροπή στον κύλινδρο εκ του νήματος (ούτε από τα αριστερά ούτε από τα δεξιά) και ο κύλινδρος ηρεμεί μέχρις ότου το σώμα στη δεξιά πλευρά καταρχόμμενο να οδηγήσει και πάλι το νήμα σε τάση προκαλώντας ωρολογιακή περιστροφή του κυλίνδρου αυτή τη φορά. Σε αυτή την περίπτωση, λόγω αδράνειας το σώμα στο δεξιά άκρο του νήματος αμέσως μετά την ανελαστική κρούση του συσσωματώματος συνεχίζει να ανέρχεται με την ταχύτητα που είχε ακριβώς πριν την ανελαστική κρούση, δηλαδή

$$V'' = \tilde{V} \xrightarrow{[9]} V'' \approx V' = \frac{2m}{4m + M} \sqrt{2gh} \quad [11]$$

Η ολική ενέργεια του συστήματος αμέσως πριν και αμέσως μετά την ανελαστική κρούση είναι

$$E_{\piρο} = U_{ολ.} + \frac{1}{2}(m + m_{\beta} + m')\tilde{V}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} MR^2 \tilde{\Omega}^2 \approx \dots \approx U_{ολ.} + m \left( \frac{m}{4m + M} \right) 2gh$$

$$E_{μετα} = U_{ολ.} + \frac{1}{2} m' V''^2 \approx \dots \approx U_{ολ.} + m \left( \frac{m}{4m + M} \right) \left( \frac{2m}{4m + M} \right) 2gh$$

[12]

Επειδή κατά την ανελαστική κρούση του συσσωματώματος με το δάπεδο χάνεται μέρος της ενέργειας του συστήματος θα πρέπει να ισχύει ότι

$$E_{\piρο} - E_{μετα} > 0 \Rightarrow U_{ολ.} + m \left( \frac{m}{4m + M} \right) 2gh > U_{ολ.} + m \left( \frac{m}{4m + M} \right) \left( \frac{2m}{4m + M} \right) 2gh \Rightarrow$$

$$\dots \Rightarrow \frac{2m}{4m + M} < 1 \Rightarrow 0 < 2m + M$$

[13]

Η τελευταία συνθήκη ικανοποιείται πάντοτε, συνεπώς το παραπάνω ενδεχόμενο είναι συμβατό με τα δεδομένα της άσκησης.

Περίπτωση 2<sup>η</sup>: Ξετύλιγμα του νήματος στην αριστερή μεριά και τεντωμένο νήμα στη δεξιά μεριά

Ένα άλλο ενδεχόμενο είναι ο κύλινδρος να συνεχίσει λόγω αδράνειας να περιστρέφεται αντιωρολογιακά αμέσως μετά την ανελαστική κρούση μέχρις ότου η περιστροφή του να επιβραδυνθεί πλήρως από τη ροπή που ασκείται από το τεντωμένο νήμα στα δεξιά. Μόλις σταματήσει στιγμιαία ο κύλινδρος, και πάλι το σώμα στο δεξιά άκρο του νήματος λόγω αδράνειας θα συνεχίσει να κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω με ταυτόχρονη χαλάρωση του νήματος στη δεξιά πλευρά ... μπλα μπλα μπλα ... . Είναι φανερό ότι στην περίπτωση αυτή έχουμε ξετύλιγμα του νήματος στην αριστερή πλευρά για κάποιο μικρό χρονικό διάστημα.

Για να προχωρήσουμε τον υπολογισμό, ξαναγυρνάμε στην εξ.[10]. Αυτή τη φορά, επειδή ο κύλινδρος συνεχίζει να περιστρέφεται αντιωρολογιακά μετά την ανελαστική κρούση του συσσωματώματος με το δάπεδο, το νήμα στην αριστερή μεριά ξετυλίγεται ενώ στη δεξιά μεριά παραμένει τεντωμένο (χωρίς να εμφανίζεται ποτέ σχετική ολίσθηση) και ως εκ τούτου ισχύει ότι

$$V'' = R\Omega' \quad [14]$$

Εκ των εξ.[10] και [14] είναι

$$\begin{aligned} 2mV' + \frac{1}{2}MR\Omega &= mV'' + \frac{1}{2}MR\Omega' \Rightarrow 4mV' + MR\Omega = 2mV'' + MV'' \\ \Rightarrow \dots \Rightarrow V'' &= \frac{4mV' + MV'}{2m + M} = \frac{4m + M}{2m + M} \frac{2m}{4m + M} \sqrt{2gh} = \frac{2m}{2m + M} \sqrt{2gh} \end{aligned} \quad [15]$$

Η ολική ενέργεια του συστήματος αμέσως πριν και αμέσως μετά την ανελαστική κρούση είναι

$$\begin{aligned} E_{\pi\rho\sigma} &= U_{\sigma\lambda} + \frac{1}{2}(m + m_\beta + m')\tilde{V}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\tilde{\Omega}^2 \approx \dots \approx U_{\sigma\lambda} + m\left(\frac{m}{4m + M}\right)2gh \\ E_{\mu\epsilon\tau\alpha} &= U_{\sigma\lambda} + \frac{1}{2}m'V''^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\Omega'^2 \approx \dots \approx U_{\sigma\lambda} + m\left(\frac{m}{2m + M}\right)2gh \end{aligned} \quad [16]$$

Επειδή κατά την ανελαστική κρούση του συσσωματώματος με το δάπεδο χάνεται μέρος της ενέργειας του συστήματος θα πρέπει να ισχύει ότι

$$\begin{aligned} E_{\pi\rho\sigma} - E_{\mu\epsilon\tau\alpha} > 0 \Rightarrow U_{\sigma\lambda} + m\left(\frac{m}{4m + M}\right)2gh > U_{\sigma\lambda} + m\left(\frac{m}{2m + M}\right)2gh \Rightarrow \\ \frac{1}{4m + M} > \frac{1}{2m + M} \Rightarrow 2m > 4m \Rightarrow 0 > 2m \end{aligned} \quad [17]$$

Η τελευταία σχέση είναι μη αποδεκτή γιατί ουσιαστικά συνεπάγεται ότι η ενέργεια αμέσως μετά την ανελαστική κρούση είναι μεγαλύτερη από την ενέργεια ακριβώς πριν, πράγμα που δεν είναι αποδεκτό λόγω απώλειας ενέργειας του συστήματος κατά την πλήρως ανελαστική κρούση του συσσωματώματος με το δάπεδο.

Περίπτωση 3<sup>η</sup>: Ξετύλιγμα του νήματος στην αριστερή μεριά και χαλαρό νήμα στη δεξιά μεριά

Ένα τρίτο ενδεχόμενο είναι ο κύλινδρος να συνεχίσει λόγω αδράνειας να περιστρέφεται αντιωρολογιακά αμέσως μετά την ανελαστική κρούση, με ταυτόχρονη χαλάρωση του νήματος στα δεξιά, οπότε, το σώμα στο δεξιό άκρο του νήματος λόγω αδράνειας θα συνεχίσει να κινείται κατακόρυφα διατηρώντας την ταχύτητα που είχε αμέσως πριν την ανελαστική κρούση του συσσωματώματος με το δάπεδο (με δύο λόγια, αμέσως μετά την ανελαστική κρούση το δεξί νήμα χαλαρώνει και το σώμα στο δεξί άκρο του νήματος και ο κύλινδρος κινούνται ανεξάρτητα το ένα από το άλλο). Σε αυτή την περίπτωση το σώμα στο δεξί άκρο του νήματος συνεχίζει κινούμενο κατακόρυφα με ταχύτητα που δίνεται από την εξ.[11]. Περαιτέρω, από την εξ.[10] έχουμε

$$2mV' + \frac{1}{2}MR\Omega = mV'' + \frac{1}{2}MR\Omega' \xrightarrow{[11]} 2mV' + \frac{1}{2}MV' \approx mV' + \frac{1}{2}MR\Omega' \Rightarrow$$

$$\Omega' \approx \frac{2}{MR} \left( 2m + \frac{1}{2}M - m \right) V' = \frac{1}{R} \frac{2m + M}{M} \frac{2m}{4m + M} \sqrt{2gh} \Rightarrow \Omega' \approx \frac{2m}{M} \left( \frac{2m + M}{4m + M} \right) \frac{\sqrt{2gh}}{R}$$
[18]

Η ολική ενέργεια του συστήματος αμέσως πριν και αμέσως μετά την ανελαστική κρούση είναι

$$E_{\pi\rho\sigma} = U_{\sigma\lambda} + \frac{1}{2}(m + m_\beta + m')\tilde{V}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} MR^2 \tilde{\Omega}^2 \approx \dots \approx U_{\sigma\lambda} + m \left( \frac{m}{4m + M} \right) 2gh$$

$$E_{\mu\epsilon\tau\alpha} = U_{\sigma\lambda} + \frac{1}{2} m' V'^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} MR^2 \Omega'^2 \approx \dots \approx U_{\sigma\lambda} + \frac{1}{2} m' V'^2 + \frac{1}{4} MR^2 \Omega'^2 \xrightarrow{[11]} \xrightarrow{[18]}$$

$$E_{\mu\epsilon\tau\alpha} \approx U_{\sigma\lambda} + \frac{1}{2} m V'^2 + \frac{1}{4} MR^2 \Omega'^2 = U_{\sigma\lambda} + \frac{1}{2} m \left( \frac{2m}{4m + M} \right)^2 2gh + m \frac{m}{M} \left( \frac{2m + M}{4m + M} \right)^2 2gh$$
[19]

Επειδή κατά την ανελαστική κρούση του συσσωματώματος με το δάπεδο χάνεται μέρος της ενέργειας του συστήματος θα πρέπει να ισχύει ότι

$$E_{\pi\rho\sigma} - E_{\mu\epsilon\tau\alpha} > 0 \Rightarrow U_{\sigma\lambda} + m \left( \frac{m}{4m + M} \right) 2gh > U_{\sigma\lambda} + \frac{1}{2} m \left( \frac{2m}{4m + M} \right)^2 2gh + m \frac{m}{M} \left( \frac{2m + M}{4m + M} \right)^2 2gh \Rightarrow$$

$$\frac{m}{4m + M} > \frac{1}{2} \left( \frac{2m}{4m + M} \right)^2 + \frac{m}{M} \left( \frac{2m + M}{4m + M} \right)^2 \Rightarrow 1 > \frac{2m}{4m + M} + \frac{2m + M}{M} \frac{2m + M}{4m + M} \Rightarrow$$

$$M(2m + M) > (2m + M)^2 \Rightarrow 2Mm + M^2 > 4m^2 + 4mM + M^2 \Rightarrow 0 > 2m(2m + M)$$
[20]

Η τελευταία σχέση είναι και πάλι μη αποδεκτή γιατί ουσιαστικά συνεπάγεται ότι η ενέργεια αμέσως μετά την ανελαστική κρούση είναι μεγαλύτερη από την ενέργεια ακριβώς πριν, πράγμα που δεν είναι αποδεκτό λόγω απώλειας ενέργειας του συστήματος κατά την πλήρως ανελαστική κρούση του συσσωματώματος με το δάπεδο.

Από την παραπάνω ανάλυση καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι ισχύει το σενάριο της περίπτωσης 1. Επομένως αμέσως μετά την ανελαστική κρούση του συσσωματώματος με το δάπεδο το σώμα μάζας  $m'$  εκτελεί κατακόρυφη βολή με αρχική ταχύτητα που δίνεται από την εξ. [11]. Ο χρόνος ανόδου του είναι

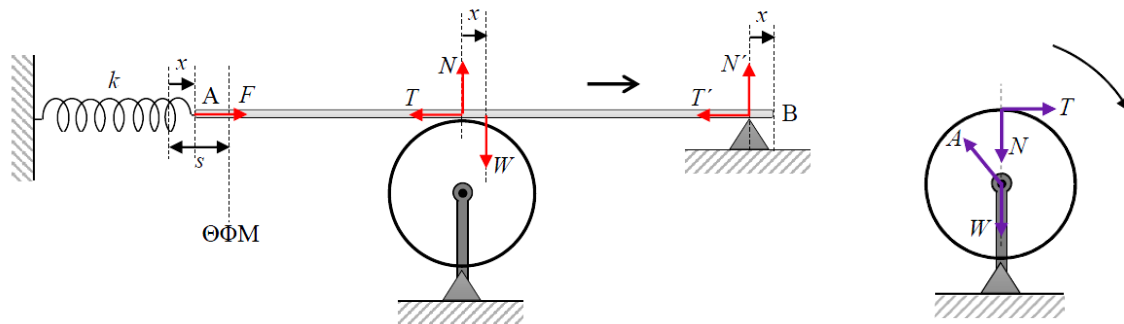
$$t_1 = \frac{1}{g} \frac{2m}{4m + M} \sqrt{2gh}$$
[21]

και συνεπώς ο συνολικός χρόνος που χρειάζεται το σώμα μάζας  $m'$  να ανέλθει και να κατέλθει είναι

$$\Delta t = 2t_1 = \frac{4m}{4m + M} \sqrt{\frac{2h}{g}}$$
[22]

Μόλις το σώμα μάζας  $m'$  ξαναπεράσει κατερχόμενο από τη θέση που είχε ανερχόμενο αμέσως μετά την ανελαστική κρούση του συσσωματώματος, το νήμα στη δεξιά πλευρά ξανατεντώνεται ασκώντας ροπή στον κύλινδρο που τείνει να τον περιστρέψει ωρολογιακά. Επειδή στην εξεταζόμενη περίπτωση δεν έχουμε ξετύλιγμα του νήματος στην αριστερή πλευρά αλλά μόνο χαλάρωση, προκύπτει ότι το συσσωμάτωμα θα αρχίσει να ανασηκώνεται (από τη στιγμή της ανελαστικής κρούσης του με το δάπεδο) σε χρόνο ίσο προς εκείνον που δίνεται στην εξ. [22], δηλαδή, αμέσως μόλις το σώμα στη δεξιά μεριά κατερχόμενο οδηγήσει σε τέντωμα του δεξιού νήματος.

#### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>



- A. Οι ασκούμενες δυνάμεις στη δοκό φαίνονται στην αριστερή εικόνα παραπάνω. Έστω  $s$  η αρχική συμπίεση του ελατηρίου και  $x$  η προς τα δεξιά μετατόπιση (μετρούμενη από τη θέση πλήρους συμπίεσης του ελατηρίου) της δοκού σε μια τυχαία χρονική στιγμή  $t > 0$  κατά την οποία υπάρχει όμως ακόμη επαφή με το ελατήριο στο άκρο A. Οι μετατοπίσεις κατά  $x$  των άκρων της δοκού A και B, καθώς και του κέντρου μάζας της δείχνονται ρητά στην εικόνα. Η ράβδος δεν μετατοπίζεται κατακόρυφα συνεπώς ισχύει ότι

$$N + N' = W = Mg$$

κι επίσης δεν περιστρέφεται, οπότε μπορούμε να μηδενίσουμε τη συνισταμένη ροπή ως προς το κέντρο μάζας της δοκού (το γεωμετρικό της κέντρο), ήτοι

$$\begin{aligned} N \cdot x - N' \cdot (2R - x) &= 0 \Rightarrow N \cdot x - (Mg - N) \cdot (2R - x) = 0 \\ \Rightarrow \dots \Rightarrow N(x) &= \frac{Mg}{2R}(2R - x) = k(2R - x) \end{aligned}$$

Όταν το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος είναι  $x = s$  και τη στιγμή εκείνη για τη δύναμη επαφής δοκού-κυλίνδρου ισχύει ότι

$$N(x = s) = \frac{Mg}{2R}(2R - s) = k(2R - s)$$

Εύκολα βρίσκεται και για τη δύναμη επαφής δοκού-υποστηρίγματος ότι

$$N'(x) = \frac{Mgx}{2R} = kx$$

οπότε τη στιγμή κατά την οποία είναι  $x = s$  βρίσκουμε ότι



$$N'(x = s) = \frac{Mgs}{2R} = ks$$

- B.** Η δοκός κινείται οριζοντίως προς τα δεξιά υπό την επίδραση της δύναμης του ελατηρίου (για όσο υπάρχει επαφή με αυτό), της δύναμης στατικής τριβής λόγω της επαφής της με τον δίσκο, και της δύναμης τριβής ολίσθησης εκ του υποστηρίγματος. Η εξίσωση της οριζόντιας κίνησης είναι λοιπόν

$$F - T - T' = Ma \Rightarrow k(s - x) - T - \underbrace{\mu N'}_{\text{ερωτ. A}} = Ma \Rightarrow$$

$$k(s - x) - T - \mu kx = Ma$$

Οι δυνάμεις που ασκούνται στον δίσκο (βάσει και του 3<sup>ου</sup> νόμου του Νεύτωνα) δείχνονται ρητώς στην δεξιά εικόνα παραπάνω. Ο δίσκος περιστρέφεται δεξιόστροφα υπό την επίδραση της τριβής  $T$ , οπότε ισχύει ότι

$$T \cdot R = \frac{1}{2} MR^2 \alpha \Rightarrow T = \frac{1}{2} MR \alpha$$

Εφόσον δεν υπάρχει σχετική ολίσθηση μεταξύ δοκού και δίσκου η ταχύτητα του ανώτερου σημείου του δίσκου συμπίπτει με την ταχύτητα του σημείου της δοκού που είναι σε επαφή με τον δίσκο για κάθε χρονική στιγμή, δηλ.

$$v_E^{\text{δοκού}}(t) = v_E^{\text{δίσκου}}(t) \Rightarrow \frac{dv_E^{\text{δοκού}}(t)}{dt} = \frac{dv_E^{\text{δίσκου}}(t)}{dt} \Rightarrow a_E^{\text{δοκού}}(t) = a_E^{\text{δίσκου}}(t)$$

$$\Rightarrow a(t) = \alpha(t) \cdot R$$

όπου  $E$  ονομάσαμε το σημείο επαφής δοκού-δίσκου (ιδωμένο είτε ως σημείο της δοκού είτε ως ανώτερο σημείου του δίσκου). Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση επιταχύνσεων και τις εξισώσεις κίνησης δοκού και δίσκου μπορούμε να υπολογίσουμε τη δύναμη τριβής μεταξύ δοκού-δίσκου, ήτοι

$$T(x) = \frac{1}{3} k [s - (1 + \mu)x]$$

Εφαρμόζοντας το ΘΜΚΕ μεταξύ της κατάστασης της δοκού για  $t = 0$  (δηλ.  $x = 0$ ), και της κατάστασης κατά την οποία η επαφή ελατηρίου-δοκού είναι οριακή (δηλ.  $x = s$ ) λαμβάνουμε

$$\frac{1}{2} MV_{CM}^2 - 0 = W_F + W_T + W_{T'}, =$$

$$= \frac{k}{2} \int_0^s x dx - \frac{k}{3} \int_0^s [s - (1 + \mu)x] dx - \mu k \int_0^s x dx$$

$$= \frac{1}{2} ks^2 - \frac{ks^2}{6} (1 - \mu) - \mu k \frac{s^2}{2} = \frac{ks^2}{3} (1 - \mu)$$

ή τελικώς

$$V_{CM} = s \sqrt{\frac{g}{3R} (1 - \mu)}$$

Επειδή η δοκός εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση το σημείο επαφής  $E$  έχει ταχύτητα

$$v_E^{\text{δοκού}} = V_{CM} = s\sqrt{\frac{g}{3R}}(1 - \mu)$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας την προαναφερθείσα συσχέτιση ταχυτήτων, το σημείο επαφής E, ιδωμένο ως ανώτερο σημείο του δίσκου έχει γραμμική ταχύτητα

$$v_E^{\text{δίσκου}} = s\sqrt{\frac{g}{3R}}(1 - \mu)$$

και συνεπώς, η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του δίσκου τη στιγμή που οριακά η δοκός αποχωρίζεται το ελατήριο είναι

$$\omega = \frac{s}{R}\sqrt{\frac{g}{3R}}(1 - \mu)$$

- Γ. Εφόσον δεν υπάρχει σχετική ολίσθηση μεταξύ δοκού και δίσκου ισχύει ο εξής συλλογισμός: Στο χρονικό διάστημα από  $t = 0$  ως τη στιγμή που η δοκός είναι οριακά σε επαφή με το ελατήριο, το κέντρο μάζας της δοκού μετατοπίστηκε κατά την απόσταση  $s$ , ο δε κύλινδρος στράφηκε δεξιόστροφα κατά μία επίκεντρη γωνία  $\phi$  η οποία βαίνει σε τόξο ακτίνας  $R$  και μήκους  $s$  επίσης, δηλ.  $\phi = s / R$ . Από την στιγμή που η δοκός αποχωρίζεται από το ελατήριο και μετά, η οριζόντια κίνηση της δοκού διεξάγεται μόνο υπό την επιδράσεων των δυνάμεων τριβής. Οι νέες εξισώσεις κίνησης του συστήματος δοκός-δίσκος είναι πλέον

$$-T - T' = Ma \Rightarrow -T - \mu N' = Ma \Rightarrow -T - \mu kx = Ma$$

για την δοκό, και

$$T \cdot R = \frac{1}{2}MR^2\alpha \Rightarrow T = \frac{1}{2}MR\alpha = \frac{1}{2}Ma$$

για τον δίσκο. Η στατική τριβή μεταξύ δοκού-δίσκου δίνεται πλέον από τη σχέση (το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι η στατική τριβή μεταξύ δοκού-δίσκου έχει πλέον φορά προς τα δεξιά, δηλ. κατά τη διεύθυνση κίνησης της δοκού, και όχι προς τα αριστερά όπως υπετέθει αρχικώς - λύσαμε απλώς το σύστημα εξισώσεων πιο πάνω)

$$\bar{T} = -\frac{1}{3}\mu kx \quad (\text{στατική τριβή δοκού-δίσκου χωρίς την επίδραση του ελατηρίου})$$

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τη μετατόπιση της δοκού έως ότου το σύστημα δοκού-δίσκου ακινητοποιηθεί. Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Κ.Ε. μεταξύ της στιγμής που η δοκός αποχωρίζεται το ελατήριο και της στιγμής ακινητοποίησης λαμβάνουμε

$$0 - \frac{1}{2}MV_{CM}^2 = W_T + W_{T'} = \frac{\mu k}{3} \int_s^\ell x dx - \mu k \int_s^\ell x dx \Rightarrow -\frac{1}{2}Ms^2 \frac{g}{3R}(1 - \mu) = -\frac{2\mu k}{3} \int_s^\ell x dx \Rightarrow$$

$$\frac{k}{3}s^2(1 - \mu) = \frac{2\mu k}{3} \left( \frac{\ell^2 - s^2}{2} \right) \Rightarrow s^2(1 - \mu) = \mu(\ell^2 - s^2) \Rightarrow s^2 - \mu s^2 = \mu\ell^2 - \mu s^2 \Rightarrow$$

$$s^2 = \mu\ell^2 \Rightarrow \ell = \frac{s}{\sqrt{\mu}}$$

όπου  $\ell$  είναι η απόσταση που καλύπτει το κέντρο μάζας της δοκού μέχρι να ακινητοποιηθεί, από τη στιγμή που αποχωρίζεται το ελατήριο και κήθεν. Μιας και δεν υπάρχει σχετική ολίσθηση δοκού-δίσκου ισχύει ο προηγούμενος συλλογισμός βάσει του οποίου ο κύλινδρος στράφηκε δεξιόστροφα κατά μία επιπλέον επίκεντρη γωνία, έστω  $\theta$ , η οποία

βαίνει σε τόξο ακτίνας  $R$  και μήκους  $\ell$  επίσης, δηλ.  $\theta = \ell / R$ . Συνεπώς, ο αριθμός των περιστροφών του δίσκου στο προαναφερθέν χρονικό διάστημα δίνεται από τη σχέση

$$N = \frac{\phi + \theta}{2\pi} = \frac{\frac{s}{R} + \frac{\ell}{R}}{2\pi} = \frac{s + s / \sqrt{\mu}}{2\pi R} = \frac{s}{2\pi R} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{\mu}} \right)$$

**ΤΕΛΟΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ ΚΡΙΤΗΡΙΟΥ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ**