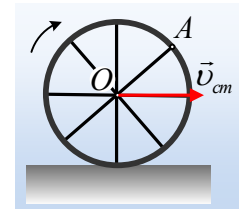


Οι ταχύτητες δύο σημείων ενός τροχού.

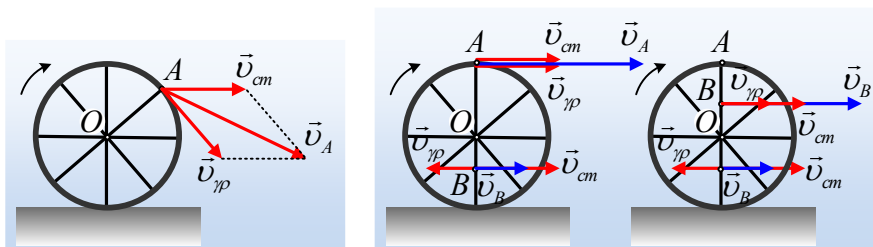
Ένας τροχός ακτίνας $R=0,5\text{m}$ κυλιέται σε οριζόντιο επίπεδο με σταθερή ταχύτητα του κέντρου μάζας του O . Ένα σημείο A , βρίσκεται στο άκρο μιας ακτίνας του. Τη στιγμή t_1 , όπου η ταχύτητα του σημείου A γίνεται μέγιστη, ένα άλλο σημείο B , έχει ταχύτητα μέτρου $v_1=0,8\text{m/s}$ της ίδιας διεύθυνσης με την ταχύτητα του σημείου A . Τη στιγμή t_2 όπου η ταχύτητα του σημείου A γίνεται η ελάχιστη δυνατή, η ταχύτητα του B έχει μέτρο $v_2=3,2\text{m/s}$.



- i) Να υπολογιστεί η ταχύτητα v_{cm} του κέντρου O του τροχού.
- ii) Να βρεθεί η θέση του σημείου B , καθώς και η απόσταση (AB) των δύο σημείων του τροχού.
- iii) Να υπολογιστεί η μεταβολή της ταχύτητας του σημείου A , μεταξύ της στιγμής t_1 και μιας επόμενης χρονικής στιγμής που η ακτίνα OA γίνεται οριζόντια, για πρώτη φορά.

Απάντηση:

- i) Θεωρούμε την κίνηση του τροχού ως σύνθετη, μια μεταφορική με ταχύτητα v_{cm} και μια στροφική γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο του O , με γωνιακή ταχύτητα ω . Συνεπώς σε κάθε θέση η ταχύτητα του σημείου A , θα είναι ίση με το διανυσματικό άθροισμα της v_{cm} και της γραμμικής ταχύτητας λόγω της κυκλικής του κίνησης, γύρω από το O , με μέτρο $v_{\gamma\rho}=\omega R$, όπως στο διπλανό σχήμα. Αφού ο τροχός κυλιέται για τα μέτρα των δύο αυτών ταχυτήτων ισχύει $v_{cm}=v_{\gamma\rho}=\omega R$. Αλλά για να είναι μέγιστη η ταχύτητα του σημείου A τη στιγμή t_1 , θα πρέπει να βρεθεί στο ανώτερο σημείο, όπως στο δεύτερο σχήμα, όπου $v_A=v_{cm}+v_{\gamma\rho}=2v_{cm}$, αφού σε κάθε άλλη θέση, με βάση το σχήμα $v_A<v_{cm}+v_{\gamma\rho}$ (τριγωνική ανισότητα).



Αφού το σημείο B έχει ταχύτητα της ίδιας διεύθυνσης με την ταχύτητα του σημείου A , θα βρίσκεται στην ίδια διάμετρο με το σημείο A , ή κάτω από το κέντρο (δεύτερο σχήμα) ή πάνω από το O (τρίτο σχήμα).

Εξάλλου το σημείο A έχει ελάχιστη ταχύτητα $v_A=v_{cm}-\omega R=0$, τη στιγμή που βρίσκεται σε επαφή με το έδαφος. Αλλά στο 2^ο σχήμα $v_B=v_{cm}-v_{\gamma\rho/B}$, ενώ στο 3^ο $v_B=v_{cm}+v_{\gamma\rho/B}$. Συνεπώς ταχύτητα μικρότερου μέτρου ($0,8\text{m/s}$) το σημείο B έχει στο 2ο σχήμα, ενώ στο 3^ο σχήμα έχει μεγαλύτερη ταχύτητα ($3,2\text{m/s}$), πράγμα που σημαίνει ότι στο μεσαίο σχήμα, δείχνει τη

θέση του B, με το A στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς του και στο τελευταίο σχήμα τη θέση του όταν το A έρθει σε επαφή με το έδαφος. Αλλά τότε για τις ταχύτητες του B:

$$v_{cm} - v_{\gamma\rho/B} = v_1 \quad (1) \quad \text{και} \quad v_{cm} + v_{\gamma\rho/B} = v_2 \quad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη, παίρνουμε $2v_{cm} = v_1 + v_2 \rightarrow$

$$v_{cm} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{0,8 + 3,2}{2} m/s = 2 m/s$$

ii) Για την γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του τροχού έχουμε:

$$v_{cm} = \omega R \rightarrow \omega = \frac{v_{cm}}{R} = \frac{2}{0,5} rad/s = 4 rad/s$$

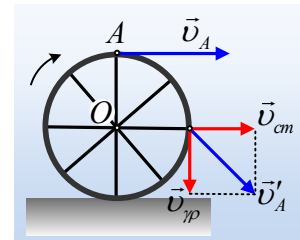
Ενώ από την (1) παίρνουμε:

$$v_{cm} - v_{\gamma\rho/B} = v_1 \rightarrow v_{\gamma\rho/B} = v_{cm} - v_1 = 2 m/s - 0,8 m/s = 1,2 m/s, \text{ οπότε:}$$

$$v_{\gamma\rho/B} = \omega \cdot r \rightarrow r = \frac{v_{\gamma\rho/B}}{\omega} = \frac{1,2}{4} m = 0,3 m = (OB)$$

Αλλά τότε $(AB) = R + r = 0,5 m + 0,3 m = 0,8 m$.

iii) Στο διπλανό σχήμα βλέπετε την ταχύτητα του σημείου A, τη στιγμή που βρίσκεται στο ανώτερο σημείο της τροχιάς του, μέτρου $v_A = v_{cm} + \omega R = 2v_{cm} = 4 m/s$, καθώς και τη στιγμή που η ακτίνα OA γίνεται οριζόντια, όπου η ταχύτητά του είναι το διανυσματικό άθροισμα $\vec{v}'_A = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{\gamma\rho}$.



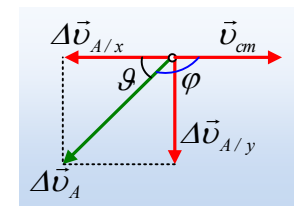
Για τη μεταβολή λοιπόν της ταχύτητάς, μεταξύ των δύο αυτών θέσεων είναι:

$$\Delta \vec{v}_A = \vec{v}'_A - \vec{v}_A \begin{cases} \Delta v_{A/x} = v'_{A/x} - v_{A/x} = v_{cm} - 2v_{cm} = -v_{cm} \\ \Delta v_{A/y} = v'_{A/y} - v_{A/y} = v_{\gamma\rho} - 0 = v_{cm} \end{cases}$$

Αλλά τότε η μεταβολή της ταχύτητας του σημείου A, με βάση το διπλανό σχήμα, έχει μέτρο:

$$\Delta v_A = \sqrt{(\Delta v_{A/x})^2 + (\Delta v_{A/y})^2} = \sqrt{v_{cm}^2 + v_{cm}^2} \rightarrow$$

$$\Delta v_A = v_{cm} \sqrt{2} = 2\sqrt{2} m/s$$



Ενώ η μεταβολή της ταχύτητας σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση γωνία $\theta = 45^\circ$ (διαγώνιος τετραγώνου) ή γωνία $\varphi = \theta + 90^\circ = 135^\circ$ με την ταχύτητα v_{cm} .

dmargaris@gmail.com