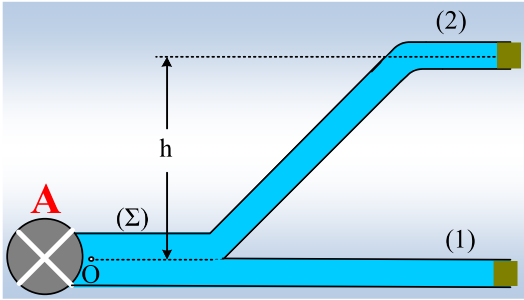
Η τροφοδοσία μιας κατοικίας.



Μια διώροφη κατοικία τροφοδοτείται με νερό μέσω μιας αντλίας, ο ρόλος της οποίας είναι να δημιουργεί σταθερή πίεση p_o, στην αριστερή άκρη του οριζόντιου σωλήνα (Σ), με διατομή $A=10cm^2$.

Ο σωλήνας (Σ) διαχωρίζεται σε δύο άλλους σωλήνες (1) και (2), όπου ο πρώτος συνεχίζει σε οριζόντια διεύθυνση μεταφέροντας το νερό στο ισόγειο, ενώ ο δεύτερος ανεβάζει νερό στον πρώτο όροφο σε ύψος h=3m. Οι σωλήνες αυτοί, με διατομή $A_1=5cm^2$, κλείνονται στα άκρα τους με τάπες. Ανοίγουμε την τάπα στο άκρο του σωλήνα (1), οπότε το νερό εκρέει με ταχύτητα $υ_1=4\sqrt{6}$ m/s.

i) Να υπολογιστεί η πίεση που δημιουργεί η αντλία στο σημείο Ο.

ii) Κλείνουμε την τάπα στο σωλήνα (1) και ανοίγουμε την τάπα στο άκρο του σωλήνα του πρώτου ορόφου. Ποια είναι η παροχή μέσω του σωλήνα (2), αν η πίεση στο σημείο Ο παραμένει όση στο προηγούμενο ερώτημα;

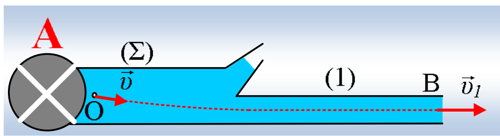
Ανοίγουμε ταυτόχρονα και τις δύο τάπες και ρυθμίζουμε έτσι την αντλία, ώστε η παροχή του πρώτου ορόφου να γίνει ίση με 1L/s.

iii) Να βρεθεί η παροχή από το σωλήνα του ισογείου.

iv) Πόση είναι τώρα η πίεση που δημιουργεί η αντλία στην έξοδό της (σημείο Ο);

Δίνεται η ατμοσφαιρική πίεση $p_{ατ}=10^5N/m^2$, η πυκνότητα του νερού $ρ=1.000kg/m^3$, η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10m/s^2$, ενώ όλες οι ροές να θεωρηθούν μόνιμες και στρωτές ροές ιδανικού ρευστού.

Απάντηση:



i) Εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli μεταξύ του σημείου Ο και της εξόδου του σωλήνα (1), σημείο Β.

$$p_O+\frac{1}{2}\rho\upsilon^2=p_B+\frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 \quad (1)$$

Εξάλλου από την εξίσωση της συνέχειας μεταξύ των διατομών, των δύο σωλήνων, στα σημεία Ο και Β, παίρνουμε:

$$A\cdot\upsilon=A_1\cdot\upsilon_1\rightarrow\upsilon=\frac{A_1\cdot\upsilon_1}{A}=0{,}5\upsilon_1=2\sqrt{6}\,m/s$$

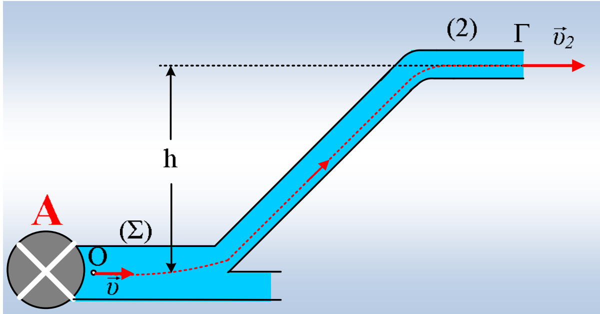
Και με αντικατάσταση στην (1), λαμβάνοντας υπόψη ότι $p_B=p_{ατ}$ παίρνουμε:

$$p_O=p_{\alpha\tau}+\frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2-\frac{1}{2}\rho\upsilon^2\rightarrow$$

$$p_O=10^5\text{Pa}+\frac{1}{2}1.000\cdot 96Pa-\frac{1}{2}1.000\cdot 24Pa=136.000Pa$$

ii) Εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli μεταξύ του σημείου Ο και της εξόδου του σωλήνα (2), σημείο Γ.

$$p_O + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 = p_\Gamma + \rho g h + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 \quad (2)$$



Εξάλλου από την εξίσωση της συνέχειας μεταξύ των διατομών, των δύο σωλήνων, στα σημεία Ο και Γ, παίρνουμε:

$$A \cdot \upsilon = A_1 \cdot \upsilon_2 \rightarrow \upsilon = \frac{A_1 \cdot \upsilon_2}{A} = 0{,}5\upsilon_2$$

Και με αντικατάσταση στην (2), λαμβάνοντας υπόψη ότι $p_\Gamma = p_{\alpha\tau}$ παίρνουμε:

$$p_O + \frac{1}{2}\rho(0{,}5\upsilon_2)^2 = p_{\alpha\tau} + \rho g h + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 \rightarrow$$

$$\upsilon_2 = \sqrt{\frac{2(p_o - p_{\alpha\tau} - \rho g h)}{0{,}75\rho}} = \sqrt{\frac{2(136.000 - 100.000 - 30.000)}{0{,}75 \cdot 1000}}\,\frac{m}{s} = 4m/s$$

Αλλά τότε η παροχή μέσω του σωλήνα (2) είναι ίση:

$$\Pi_2 = A_1 \cdot \upsilon_2 = 5 \cdot 10^{-4} \cdot 4\ m^3/s = 2 \cdot 10^{-3}\ m^3/s = 2L/s.$$

iii) Με ανοικτές και τις δύο τάπες, έστω ότι οι ταχύτητες εκροής από τους σωλήνες είναι u_1 και u_2 ενώ η ταχύτητα του νερού στο σωλήνα (Σ) είναι u. Από την παροχή του σωλήνα (2) βρίσκουμε:

$$\Pi_2 = A_1 \cdot u_2 \rightarrow u_2 = \frac{\Pi_2}{A_1} = \frac{10^{-3}}{5 \cdot 10^{-4}}\,m/s = 2m/s$$

Όμως από την εξίσωση της συνέχειας παίρνουμε:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 \rightarrow$$

$$A \cdot u = A_1 \cdot u_1 + A_1 \cdot u_2 \rightarrow u_1 + u_2 = 2u \quad (3)$$

Από την εξίσωση Bernoulli μεταξύ Ο και Β, παίρνουμε:

$$p'_O + \frac{1}{2}\rho u^2 = p_{\alpha\tau} + \frac{1}{2}\rho u_1^2 \quad (4)$$

Ενώ από την ίδια εξίσωση μεταξύ Ο και Γ, θα έχουμε:

$$p'_O + \frac{1}{2}\rho u^2 = p_{\alpha\tau} + \rho g h + \frac{1}{2}\rho u_2^2 \quad (5)$$

Από (4) και (5) παίρνουμε:

$$p_{\alpha\tau} + \frac{1}{2}\rho u_1^2 = p_{\alpha\tau} + \rho g h + \frac{1}{2}\rho u_2^2 \rightarrow$$

$$u_1 = \sqrt{u_2^2 + 2gh} = \sqrt{2^2 + 2 \cdot 10 \cdot 3}\,\frac{m}{s} = 8\ m/s$$

Αλλά τότε η ζητούμενη παροχή του ισογείου είναι:

$$\Pi_1 = A_1 \cdot u_1 = 5 \cdot 10^{-4} \cdot 8\ m^3/s = 4L/s$$

iv) Με αντικατάσταση στην (3) βρίσκουμε:

$$u = \frac{u_1 + u_2}{2} = \frac{2+8}{2}\frac{m}{s} = 5\ m/s$$

Και ερχόμενοι στην εξίσωση (4) παίρνουμε:

$$p'_O = p_{\alpha\tau} + \frac{1}{2}\rho u_1^2 - \frac{1}{2}\rho u^2 \ \rightarrow$$

$$p'_O = 10^5\text{P}\alpha + \frac{1}{2}1.000 \cdot 8^2 P\alpha - \frac{1}{2}1.000 \cdot 5^2 P\alpha = 119.500 P\alpha$$

dmargaris@gmail.com